

多角数

右図のように、点を正三角形状に順に並べていくと、点の個数は

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots$$

となる。このような数を**三角数**という。また、点を正方形状に順に並べていくとき、それらの点の個数から得られる自然数の列

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

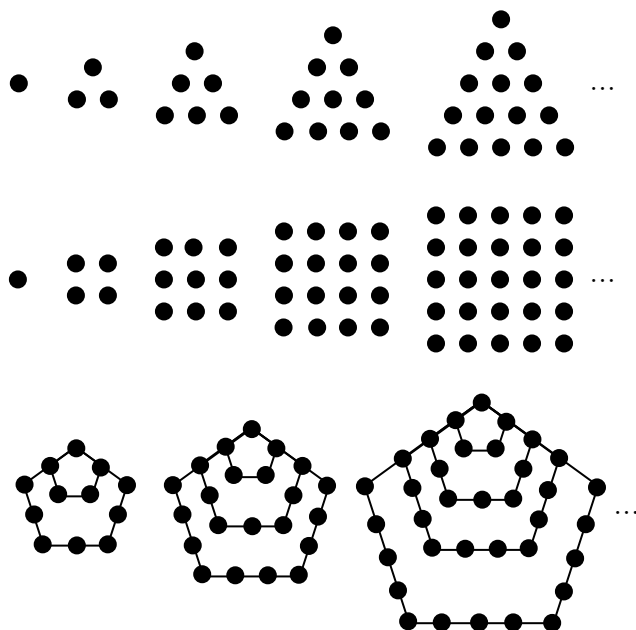
の各数を**四角数**という。

さらに、点を五角形上に順に並べていくとき、それらの点の個数から得られる自然数の列

$$1, 5, 12, 22, 35, \dots$$

の各数を**五角数**という。

一般に、点を m 角形上に並べて得られる点の個数からなる自然数の列の各数を m 角数という。



n 番目の三角数は、

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{自然数の和})$$

n 番目の四角数は、

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2 \quad (\text{奇数の和})$$

n 番目の m 角数は、増え方（階差数列）を考慮して、

$$\begin{aligned} & 1 + \{(m-2)+1\} + \{(m-2)\cdot 2+1\} + \{(m-2)\cdot 3+1\} + \dots + \{(m-2)\cdot (n-1)+1\} \\ &= n + (m-2) + 2(m-2) + 3(m-2) + \dots + (n-1)(m-2) \\ &= n + (m-2) \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{2} \{2n + (m-2)(n-1)n\} = \frac{1}{2} \{(m-2)n^2 - (m-4)n\} \\ & \quad (n=1 \text{ のとき当てはまる}) \end{aligned}$$

である。